TITLE:

拡散を伴ったコンタクト・プロセスについて(「非平衡系の統計物理」研究会(その2),研究会報告)

AUTHOR(S):

香取, 眞理; 今野, 紀雄

CITATION:

香取, 眞理 ...[et al]. 拡散を伴ったコンタクト・プロセスについて(「非平衡系の統計物理」研究会(その2),研究会報告). 物性研究 1992, 59(2): 175-176

ISSUE DATE:

1992-11-20

URL:

http://hdl.handle.net/2433/94986

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

拡散を伴ったコンタクト・プロセスについて

香取眞理（中央大理工）、今野紀雄（室蘭工大）

§1. Introduction

コンタクト・プロセスは格子 $\mathbf{Z}^d$上の連続時間マルコフ過程であり、伝染病伝播の簡単な数理モデルとして 1974年に Harris によって提案された[1)]。各格子点には高々一個の粒子しか存在できず、各粒子は rate 1で消滅するか、その最近接格子点に（もしもそこが空孔ならば）rate λ で新しく粒子を生む。本講演では、このプロセスが拡散（各粒子がその最近接格子へ rate D でホッピングする）を伴った場合について報告した。

このプロセス (diffusive contact process — DCP) の生成作用素Ω は次で与えられる[2)]。

$$\Omega f(\eta) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} c(x,\eta)\{f(\eta_x) - f(\eta)\} + \sum_{x,y:\eta(x)=1,\eta(y)=0,|x-y|=1} D\{f(\eta_{xy}) - f(\eta)\}, \tag{1.1}$$

但し、$c(x,\eta) = \eta(x) + \lambda(1-\eta(x))\sum_{y:|x-y|=1}\eta(y), \lambda \geq 0, D \geq 0,$ である。また η に対して、η_x は x での、η_{xy} は x と y での配置を入れ換えたものを表す。

DCP は attractive なので[2)]、各 Dに対して唯一の臨界値$\lambda_c^{(d)}(D)$ を持つことが示せる。各 Dで、$\lambda < \lambda_c^{(d)}(D)$ のときには任意の初期状態から始めても十分時間が経つと粒子はすべて消滅してしまい (extinction)、$\lambda > \lambda_c^{(d)}(D)$ のときにはδ_0(i.e. $\eta \equiv 0$) 以外の任意の初期状態に対して $t \to \infty$ でも粒子が残存する確率が正となる (survival)。臨界値$\lambda_c^{(d)}(D)$ の D 依存性が興味深い。

§2. $\lambda_c^{(d)}(D)$ の下限について

有限個の格子点からなる集合 A を考える。この A 内の格子点上にのみ粒子がある状態を初期状態としたとき、時刻 $t \to \infty$ の極限においても粒子が残存する確率（ survival probability) を$\sigma(A)$ と書くことにする。特に、$A = \{x\}$（格子点 x 一点のみ）としたときの survival probability を $\rho(\lambda, D) = \sigma(\{x\})$ と書くと、この $\rho(\lambda, D)$ はいわゆる order parameter と見なせることが示せる。すなわち $\rho(\lambda, D) = 0$ ならば $\lambda < \lambda_c(D)$ であり、$\rho(\lambda, D) > 0$ ならば $\lambda > \lambda_c(D)$ である。また、(1.1) の生成作用素 Ω を用いると異なった初期状態の survival probability の間に成り立つべき等式（一種の相関等式）を導くことができる[3)]。他方無限粒子系の一般論から、有限個の格子点からなる任意の集合 A, B に対して submodularity と呼ばれる次式のような不等式が DCP においても成り立つ事が導かれる[2)]。

$$\sigma(A \cup B) + \sigma(A \cap B) \leq \sigma(A) + \sigma(B). \tag{2.1}$$

以上の事から、我々は DCP の臨界値 $\lambda_c^{(d)}(D)$ の対して次のような下限を得ることができた。

Theorem 2.1[3,4)]

$$\lambda_c^{(d)}(D) \geq \frac{(2d-1)D+1}{(2d-1)(2dD+1)} > 0.$$

この下限は $D=0$ のとき $1/(2d-1)$ であるが、D について単調減少関数であって、$D \to \infty$ の極限ではコンタクト・プロセスに対して平均場近似が与える臨界値である $1/(2d)$ に収束する。

§3. $\lambda_c^{(d)}(D)$ の上限について

Holley と Liggett は1978年に、拡散を伴わないコンタクト・プロセスの臨界値（すなわち $\lambda_c^{(d)}(0)$）に対して、次式のような非常に良い上限を与えている[5)]。

$$\lambda_c^{(d)}(0) \leq \frac{2}{d}. \tag{3.1}$$

我々は、拡散を伴う DCP の場合にも彼らの議論が適応できるかどうかを検討した。彼らの議論は、コンタクト・プロセスの survival state を renewal measure と呼ばれる比較的計算が容易な測度[2)]でうまく近似してやるものである。Holley-Liggett の場合には、選ばれた renewal measure はべき関数と factorial を用いて表されていた。我々は、この factorial の部分を Gauss の超幾何級数で置き換えた形を持つ、より一般化された renewal measure を構成し、これを用いれば拡散を伴った場合にも Holley-Liggett の議論が適応できることを示した。こうして臨界値 $\lambda_c^{(d)}(D)$ に対して、次に示すような上限を得た。

Theorem 3.1

$$\lambda_c^{(d)}(D) \leq \frac{1}{d}\{1+\sqrt{1+2dD}\}.$$

この上限は当然、Holley-Liggett の結果 (3.1) を含んでいる。但し、Dについて単調増加関数であって、$D \to \infty$ で $\sqrt{D}$ に比例して発散してしまう。

§4. Discussion

我々は拡散を伴うコンタクト・プロセスの臨界値 $\lambda_c^{(d)}(D)$ に対して厳密な下限と上限を得ることができた。しかしながら、その下限は D の減少関数であるのに対して、上限の方は増加関数であり、この二つでおさえられる領域は D とともにだんだんと広がってしまう。このため臨界値の「拡散度」D 依存性を調べるという我々の当初の目的には残念ながらあまり役に立たない。この問題には、別の手法が必要である様子である。

References

1) T.E.Harris: *Ann.Prob.* **2** (1974) 969-988.

2) 無限粒子系の取扱いについては T.M.Liggett: *Interacting Particle Systems* (Springer-Verlag, New York, 1985) を参照のこと。

3) M.Katori and N.Konno: *Physica* **A** (1992) 印刷中。

4) M.Katori and N.Konno: *J.Magn.Magn.Mater.* **104-107** (1992) 267-268.

5) R.Holley and T.M.Liggett: *Ann.Prob.* **6** (1978) 198-206.